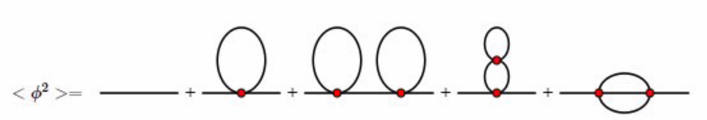
Ejercicio del cap. 5 de CFT de J. García

Determinar $\langle \phi^2 \rangle$ a orden 2 si la acción con interacción es
$S[\phi] = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4$
por un doble camino
a) Usando los diagramas de Feynman
b) Por cálculo directo

Resolución
a) Los posibles diagramas (fuente CRUL)



$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{m^6} + \frac{1}{2^2}\frac{\lambda^2}{m^{10}} + \frac{1}{2^2}\frac{\lambda^2}{m^{10}} + \frac{1}{3!}\frac{\lambda^2}{m^{10}}$
$\boxed{\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{m^6} + \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{m^{10}}}$

b) Partimos de

$Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi - \frac{\lambda}{24}\phi^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi} e^{-\frac{\lambda}{24}\phi^4}$

Como λ es pequeño y desarrollando por Taylor $e^{-\frac{\lambda}{24}\phi}$ hasta orden 3
$e^{-\frac{\lambda}{24}\phi^4} \simeq 1 - \frac{1}{24}\phi^4\lambda + \frac{1}{2}\frac{1}{24^2}\phi^8\lambda^2 - \frac{1}{6}\frac{1}{24^3}\phi^{12}\lambda^3$
$Z[J] \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi}(1 - \frac{1}{24}\phi^4\lambda + \frac{1}{2}\frac{1}{24^2}\phi^8\lambda^2 - \frac{1}{6}\frac{1}{24^3}\phi^{12}\lambda^3)$
$Z[J] \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi} - \frac{\lambda}{24}\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi}\phi^4 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi}\phi^8 - \cdots$

$Z[J] \simeq Z_0[J] - \frac{\lambda}{24}Z_0^{(4)}[J] + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}Z_0^{(8)}[J] - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}Z_0^{(12)}[J]$

y derivando dos veces

$Z^{(2)}[J] \simeq Z_0^{(2)}[J] - \frac{\lambda}{24}Z_0^{(6)}[J] + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}Z_0^{(10)}[J] - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}Z_0^{(14)}[J]$

Para J=0
$Z[0] \simeq Z_0[0](1 - \frac{\lambda}{24}\frac{Z_0^{(4)}[0]}{Z_0[0]} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{Z_0^{(8)}[0]}{Z_0[0]} - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}\frac{Z_0^{(12)}[0]}{Z_0[0]})$
$Z[0] \simeq Z_0[0](1 - \frac{\lambda}{24}\frac{3}{m^4} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{7\cdot 5\cdot 3}{m^8} - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}\frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{12}})$

y

$Z^{(2)}[0] \simeq Z_0[0](\frac{Z_0^{(2)}[0]}{Z_0[0]} - \frac{\lambda}{24}\frac{Z_0^{(6)}[0]}{Z_0[0]} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{Z_0^{(10)}[0]}{Z_0[0]} - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}\frac{Z_0^{(14)}[0]}{Z_0[0]})$
$Z^{(2)}[0] \simeq Z_0[0](\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{24}\frac{5\cdot 3}{m^6} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{10}} - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}\frac{13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{14}})$

Podemos ya obtener
$\langle \phi^2 \rangle = \frac{Z^{(2)}[0]}{Z[0]}$

$\langle \phi^2 \rangle \simeq \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{24}\frac{5\cdot 3}{m^6} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{10}} - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}\frac{13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{14}}}{1 - \frac{\lambda}{24}\frac{3}{m^4} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\frac{7\cdot 5\cdot 3}{m^8} - \frac{1}{6}\frac{\lambda^3}{24^3}\frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{12}}} = \frac{(3072m^{12} - 1920m^8\lambda + 2520m^4\lambda^2 - 5005\lambda^3)}{m^2(3072m^{12} - 384m^8\lambda + 280m^4\lambda^2 - 385\lambda^3)} = f(\lambda)$

Hemos obtenido un cociente de dos polinomios en λ que aproximaremos por Taylor ya que λ es pequeña. Tendremos que obtener los valores de la función y de las dos primeras derivadas (orden 2) para $\lambda = 0$

Procedemos

$f(\lambda) = \frac{\left(3072m^{12}-1920m^8\lambda+2520m^4\lambda^2-5005\lambda^3\right)}{m^2(3072m^{12}-384m^8\lambda+280m^4\lambda^2-385\lambda^3)}$
$f(0) = \frac{1}{m^2}$
$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda) : \frac{-32m^2\left(147\,456m^{16}-430\,080m^{12}\lambda+1344\,000m^8\lambda^2-73\,920m^4\lambda^3+13\,475\lambda^4\right)}{(3072m^{12}-384m^8\lambda+280m^4\lambda^2-385\lambda^3)^2}$
$f^{(1)}(0) = -32\frac{m^2(147\,456m^{16})}{(3072m^{12})^2} = -\frac{1}{2m^6}$

$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}f(\lambda) =$
$\frac{-64m^2\left(-603\,979\,776m^{24}+3963\,617\,280m^{20}\lambda+10\,321\,920m^{16}\lambda^2-693\,288\,960m^{12}\lambda^3+1040\,054\,400m^8\lambda^4-42\,688\,800m^4\lambda^5+5187\,875\lambda^6\right)}{(3072m^{12}-384m^8\lambda+280m^4\lambda^2-385\lambda^3)^3}$

$f^{(2)}(0) = \frac{+64m^2(603\,979\,776m^{24})}{(3072m^{12})^3} = \frac{4}{3m^{10}}$
Por consiguiente

$\left\langle\phi^2\right\rangle = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^6}\lambda + \frac{1}{2}\frac{4}{3m^{10}}\lambda^2$
$\boxed{\left\langle\phi^2\right\rangle = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^6}\lambda + \frac{2}{3m^{10}}\lambda^2}$

Que coincide con lo obtenido mediante los diagramas de Feynman, lo que nos pone muy contentos
Ceuta 11 enero 2019
Antonio Gros